2.1 - INTRODUÇÃO

Determinados fenômenos das áreas de Engenharia, requerem o desenvolvimento experimental associado a aplicação prévia, de um modelo matemático que auxilia e fornece uma aproximação teórica da lei de funcionalidade. A análise dimensional é a ferramenta que vem em auxílio, já que o trabalho experimental é em geral dispendioso e grande consumidor de tempo. Os parâmetros adimensionais que são obtidos, também podem ser usados com a finalidade de se correlacionar dados para apresentação, usando-se menor número possível de gráficos.

2.2 - HOMOGENEIDADE DAS EQUAÇÕES

Significa que qualquer equação válida, que relacione quantidades físicas, deve ser dimensionalmente homogênea. Assim cada termo da equação deve ter as mesmas dimensões. Por exemplo a equação $F = m \cdot a$

$$[F] = [m \ a]$$
$$[F] = [F L^{-1} T^{2} \ L T^{-2}]$$
$$[F] = [F]$$

2.3 - NÚMEROS ADIMENSIONAIS DE IMPORTÂNCIA

2.3.1 - NÚMERO DE REYNOLDS: R_e

Expressa a relação entre a força de inércia e a força de atrito. Usualmente escolhidos em termos de parâmetros convenientes (geométricos e do escoamento).

$$R_e = \frac{\rho V L}{\mu} \qquad (2.1)$$

ou

$$R_e = \frac{V L}{\nu} \qquad (2.2)$$

onde :

L = dimensão característica que da forma geométrica do corpo sólido

2.3.2 - NÚMERO DE FROUDE: $\Im$

Expressa a relação entre a força de inércia e a força da gravidade.

$$\Im = \frac{\dfrac{\rho V^2}{L}}{\gamma} = \frac{V^2}{L\,g} \qquad (2.3)$$

2.3.3 - NÚMERO DE WEBER: W

Expressa a relação entre a força de inércia e a força relativa a tensão superficial.

$$W = \frac{\rho V^2 L}{\sigma} \qquad (2.4)$$

onde :

σ = tensão superficial

2.3.4 - NÚMERO DE EULER: Eu

Relaciona a força devida a pressão e a força de inércia.

$$Eu = \frac{p}{\rho V^2} \qquad (2.5)$$

onde :

p = pressão

2.3.5 - NÚMERO DE MACH: Ma

Expressa a relação entre a raiz quadrada da força de inércia e a raiz quadrada da força representativa da compressibilidade do fluido.

$$Ma = \sqrt{\frac{\frac{\rho V^2}{L}}{\frac{\rho C^2}{L}}} = \frac{V}{C} \qquad (2.6)$$

onde :

C = velocidade do som

2.4 - MÉTODOS UTILIZADOS NA ANÁLISE DIMENSIONAL

2.4.1 - MÉTODO DE RAYLEIGH

O método de Rayleigh se baseia na determinação de expoentes das grandezas envolvidas em determinado fenômeno. As grandezas primárias em número de três (F ,L ,T para o ST e M, L, T para o SI), geram uma equação cada uma. Assim se o fenômeno envolve mais de três expoentes, o excedente determina um número igual de números adimensionais. Para facilitar introduziremos o método no exemplo abaixo.

Exemplo de aplicação do método de Rayleigh:

A experiência demonstra, que a lei do movimento dos fluidos com relação às superfícies sólidas, depende em geral das seguintes grandezas:

a) forma geométrica do sólido; para efeito deste exemplo adotaremos a forma circular, assim a dimensão característica é o diâmetro φ ;

b) acabamento da superfície sólida em contato com o fluido, que denominamos rugosidade e representamos por e ;

c) velocidade de escoamento do fluido V ;

d) resistência oferecida pela superfície sólida, representada por R ;

e) propriedades físicas do fluido:

μ = viscosidade dinâmica
ρ = massa específica
ε = módulo de elasticidade volumétrico
γ = peso específico
σ = tensão superficial

Nessas condições pede-se desenvolver a equação da resistência R, utilizandose o método de Rayleigh e o sistema técnico de unidades (ST).

Inicialmente a equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$R = \phi\ (\mu, \rho, V, \varphi, e, g, \varepsilon, \sigma)$$

a seguir eleva-se cada grandeza entre os parênteses a um expoente na forma de letras:

$$R = \phi\ \ \mu^a \rho^b V^c \varphi^m e^n g^p \varepsilon^r \sigma^s$$

como o sistema de unidades é o ST, para cada grandeza envolvida tem-se:

$[R] = [F\ L^{-2}]$
$[\mu]^a = [\ F\ L^{-2}\ T\ ]^a$
$[\rho]^b = [\ F\ L^{-4}\ T^2\ ]^b$
$[V]^c = [\ L\ T^{-1}\ ]^c$
$[\varphi]^m = [\ L\ ]^m$
$[e]^n = [\ L\ ]^n$
$[g]^p = [\ L\ T^{-2}]^p$
$[\varepsilon]^r = [\ F\ L^{-2}\ ]^r$
$[\sigma]^s = [\ F\ L^{-1}]^s$

com os dados acima organiza-se a tabela mostrada abaixo:

Grandezas Secundárias	Grandezas Primárias		
	F	L	T
R	1	-2	0
μ_a	a	-2a	a
ρ^b	b	-4b	2b
V_c	0	c	-c
φ_m	0	m	0
e^n	0	n	0
g_p	0	p	-2p
ε^r	r	-2r	0
σ^s	s	-s	0

Em seguida, deve-se escrever uma equação para cada grandeza primária, de tal forma que os expoentes dessas para a grandeza R seja igual a soma de todos os outros expoentes, assim:

para F:

$1 = a + b + r + s \qquad (I)$

para L:

$-2 = -2a - 4b + c + m + n + p - 2r - s \qquad (II)$

para T:

$0 = a + 2b - c - 2p \qquad (III)$

como temos 8 incógnitas e 3 equações, devemos explicitar 3 em função das outras 5. O critério de seleção leva em conta a obtenção dos números adimensionais esperados. Nesse exemplo explicitaremos os expoentes b, c, m em função dos demais. Dessa maneira resolvemos o sistema formado pelas equações (I) , (II) , (III) , obtendo-se:

$b = 1 - a - r - s$
$c = -a - 2r - 2s - 2p + 2$
$m = p - a - n - s$

levando-se esses valores à equação funcional de R tem-se:

$$R = \phi \; \mu^{a} \rho^{(1-a-r-s)} V^{(-a-2r-2s-2p+2)} \varphi^{(p-a-n-s)} e^{n} g^{p} \varepsilon^{r} \sigma^{s}$$

em seguida agrupa-se as grandezas elevadas aos mesmos expoentes, escrevendo a equação funcional de R:

$$\mathbf{R} = \varphi\left(\frac{\mu}{\rho \mathbf{V} \phi}\right)^{a}\left(\frac{\varepsilon}{\rho \mathbf{V}^{2}}\right)^{r}\left(\frac{\sigma}{\rho \mathbf{V}^{2} \phi}\right)^{s}\left(\frac{\phi \mathbf{g}}{\mathbf{V}^{2}}\right)^{p}\left(\frac{\mathbf{e}}{\phi}\right)^{n} \rho \mathbf{V}^{2}$$

os números entre os parênteses são os números adimensionais procurados, assim:

$$\left(\frac{\mu}{\rho \mathbf{V} \phi}\right)^{a} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}_{e}}\right)^{a} = \mathbf{R}_{e}^{-a}$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{\rho V^2}\right)^r = \left(\frac{1}{M_a^2}\right)^r = M_a^{-2r}$$

$$\left(\frac{\sigma}{\rho V^2 \phi}\right)^s = \left(\frac{1}{W}\right)^s = W^{-s}$$

$$\left(\frac{\phi g}{V^2}\right)^p = \left(\frac{1}{\mathfrak{I}}\right)^p = \mathfrak{I}^{-p}$$

$$\left(\frac{e}{\phi}\right)^n = (\text{rugosidade relativa})^n$$

assim a equação de R fica:

$$R = \varphi\ R_e^{-a}\ M_a^{-r}\ W^{-s}\ \mathfrak{I}^{-p} \left(\frac{e}{\phi}\right)^n \rho V^2$$

pode-se ainda identificar:

$$\left(\frac{R}{\rho V^2}\right) = E_u$$

2.4.2 - MÉTODO DE BUCKINGHAM OU TEOREMA DOS π

Se a lei de um fenômeno depende de "n" quantidades diferentes, que por sua vez são funções de "m" quantidades primárias, esta lei pode ser expressa em função de (n-m) números adimensionais.

Como os sistemas de unidades (SI e ST) tem 3 grandezas primárias então m será sempre igual a 3.

Seja o fenômeno dado pela seguinte lei:

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots \ldots\ldots, x_n) = 0$$

Escolhendo por exemplo as grandezas x_1, x_2, x_3, e elevando-as a expoentes genéricos $x_1^{\alpha}, x_2^{\beta}, x_3^{\gamma}$ e indicando por X_i uma grandeza genérica, pode-se formar os números adimensionais da seguinte forma:

$$A_i = \frac{X_i}{x_1^{\alpha_i} x_2^{\beta_i} x_3^{\gamma_i}}$$

Dessa maneira a equação do fenômeno é escrita da seguinte forma:

$$f(A_1, A_2, \ldots \ldots, A_n) = 0$$

Para melhor entendimento do método, aplicaremos o mesmo exemplo dado no item 2.4.1, assim:

$$f(R, \mu, \rho, V, \varphi, e, g, \varepsilon, \sigma) = 0$$

n = 9
m = 3 (grandezas primárias)
Nºs Adimensionais = n-m = 9 - 3 = 6

Escolhendo as grandezas ρ, V, φ e elevando-as respectivamente a α, β, γ tem-se: ρ^{α}, V_{β}, φ^{γ}, que chamaremos de terno básico, pode-se construir a tabela abaixo:

Grandezas Secundárias		Grandezas Primárias		
		F	L	T
Terno Básico	ρ_{α}	α	-4α	2α
	V_{β}	0	β	$-\beta$
	φ_{γ}	0	γ	0
μ		1	-2	1
e		0	1	0
g		0	1	-2
ε		1	-2	0
σ		1	-1	0
R		1	-2	0

À partir de cada grandeza secundária fora do terno básico, surgem os números adimensionais.

Assim número adimensional relativo a μ:

para F:

$\alpha + 0 + 0 = 1$

para L:

$-4\alpha + \beta + \gamma = -2$

para T:

$2\alpha + \beta + 0 = 1$

resolvendo o sistema de equações tem-se:

$\gamma = 1$

$\alpha = 1 \qquad \beta = 2\alpha - 1 \Rightarrow \beta = 1$

Assim tem-se:

$$A_1 = \frac{\mu}{\rho \, V \, \varphi}$$

$$A_1 = \frac{1}{R_e}$$

Número adimensional relativo a e:

para F:

$\alpha + 0 + 0 = 0$

para L:

$-4\alpha + \beta + \gamma = 1$

para T:

$2\alpha - \beta + 0 = 0$

resolvendo o sistema de equações tem-se:

$\alpha = 0 \qquad \beta = 0 \qquad \gamma = 1$

Assim tem-se:

$$A_2 = \frac{e}{\varphi}$$

rugosidade relativa

Número adimensional relativo a g:

para F:

$\alpha + 0 + 0 = 0$

para L:

$-4\alpha + \beta + \gamma = 1$

para T:

$2\alpha - \beta + 0 = -2$

resolvendo-se o sistema de equações tem-se:

$\alpha = 0 \qquad \beta = 2 \qquad \gamma = -1$

Assim tem-se:

$$A_3 = \frac{g}{V^2\ \phi^{-1}} = \frac{g\ \phi}{V^2}$$

$$A_3 = \frac{1}{\Im}$$

Número adimensional relativo a ε:

para F:

$\alpha + 0 + 0 = 1$

para L:

$-4\alpha + \beta + \gamma = -2$

para T:

$2\alpha - \beta + 0 = 0$

resolvendo-se o sistema de equações tem-se:

$\alpha = 1 \qquad \beta = 2 \qquad \gamma = 0$

Assim tem-se:

$$A_4 = \frac{\varepsilon}{\rho\ V^2} \Rightarrow A_4 = \frac{1}{M_a^2}$$

Número adimensional relativo a σ:

para F:

$\alpha + 0 + 0 = 1$

para L:

$-4\alpha + \beta + \gamma = -1$

para T:

$2\alpha - \beta + 0 = 0$

resolvendo-se o sistema de equações tem-se:

$$\alpha = 1 \qquad \beta = 2 \qquad \gamma = 1$$

Assim tem-se:

$$A_5 = \frac{\sigma}{\rho V^2 \varphi} \Rightarrow A_5 = \frac{1}{W}$$

Número adimensional relativo a R:

para F:

$\alpha + 0 + 0 = 1$

para L:

$-4\alpha + \beta + \gamma = -2$

para T:

$2\alpha - \beta + 0 = 0$

resolvendo-se o sistema de equações tem-se:

$$\alpha = 1 \qquad \beta = 2 \qquad \gamma = 0$$

Assim tem-se:

$$A_6 = \frac{R}{\rho V^2} \Rightarrow A_6 = E_u$$